

Pengujian Metode Ekstrapolasi Richardson Untuk Meningkatkan Akurasi Turunan Numerik

Ari Puji Prasetyo^{a*}

^aJurusan Teknik Elektro, STT Ronggolawe Cepu

*Email: prasetiyo@strcepu.ac.id

Diterima : 15-6-2024

-

Direview : 20-6-2024

-

Diterbitkan : 30-6-2024

Intisari

Metode ekstrapolasi Richardson, yang dinisbahkan kepada matematikawan Inggris Lewis Fry Richardson (1881-1953), adalah suatu metode akselerasi berurutan untuk meningkatkan kecepatan konvergensi barisan nilai pendekatan dari suatu konstanta. Jika suatu formula pendekatan $N_1(h)$ berlaku untuk semua ukuran langkah $h > 0$ maka dapat disusun suatu formula pendekatan baru $N_2(h)$ yang memiliki galat pemotongan lebih baik dari galat pemotongan $N_1(h)$. Dari formula $N_2(h)$ selanjutnya dapat disusun formula $N_3(h)$ dengan galat pemotongan yang lebih baik dan seterusnya. Penyusunan formula pendekatan baru ini dilakukan dengan mengasumsikan bahwa galat pemotongan $N_1(h)$ mengikuti bentuk tertentu. Pada artikel ini dibahas pengujian peningkatan akurasi perhitungan turunan fungsi secara numerik menggunakan metode ekstrapolasi Richardson. Tiga formula turunan numerik yang diuji adalah formula maju, formula mundur, dan formula tengah. Dua formula pertama memiliki galat pemotongan $O(h)$ sedangkan formula terakhir memiliki galat pemotongan $O(h^2)$. Dari lima buah fungsi pengujian yang digunakan diperoleh hasil bahwa metode ekstrapolasi Richardson mampu meningkatkan akurasi pendekatan dari ketiga formula. Hasil terbaik diperoleh pada formula tengah terkait galat pemotongan yang hanya memuat pangkat genap.

Kata Kunci : Ekstrapolasi Richardson; Turunan numerik; Galat pemotongan

Abstract

The Richardson extrapolation method, named after the English mathematician Lewis Fry Richardson (1881-1953), is a method of sequential acceleration to increase the rate of convergence of a series of approximate values of a constant. If an approximation formula $N_1(h)$ is valid for all step sizes $h > 0$ then a new approximation formula $N_2(h)$ can be constructed which has a better truncation error than the truncation error of $N_1(h)$. From formula $N_2(h)$ then formula $N_3(h)$ can be constructed with a better truncation error and so on. The formulation of this new approximation formula was carried out by assuming that the approximation error of $N_1(h)$ follows a certain form. In this paper, we discuss testing for increasing the accuracy of calculating of functions derivatives numerically using the Richardson extrapolation method. The three numerical derivative formulas tested are the forward-difference, the backward-difference, and the central-difference formula. The first two formulas have a truncation error of $O(h)$ while the last formula has a truncation error of $O(h^2)$. From the five test functions used, the results showed that the Richardson extrapolation method was able to increase the accuracy of the approximation of the three formulas. The best results were obtained in the central-difference formula regarding its truncation error which only contains even powers.

Keywords : Richardson extrapolation; Numerical differentiation; Truncation error

1. Pendahuluan

Lewis Fry Richardson (1881-1953) adalah orang pertama dalam sejarah yang tercatat melakukan peramalan cuaca secara sistematis menggunakan perhitungan matematika saat ia bekerja pada Badan Meteorologi Inggris. Sebagai bentuk penolakan terhadap Perang Dunia I, Richardson menulis tentang dampak buruk dari perang terhadap perekonomian menggunakan model matematis berupa sistem persamaan diferensial yang merepresentasikan hubungan antar negara (Burden and Faires, 2011).

Pada tahun 1927, Richardson bersama dengan J. A. Gaunt mempublikasikan artikel ilmiah yang membahas tentang suatu metode ekstrapolasi yang selanjutnya dikenal dengan nama metode ekstrapolasi Richardson. Meskipun metode ini dinisbahkan kepada Richardson, namun demikian ide yang mendasarinya telah dicetuskan sejak lama. Ekstrapolasi

Richardson merupakan penemuan kembali dari metode yang berakar dari hasil yang diperoleh Christiaan Huygens (1629-1695) dan mungkin juga dari karya Archimedes (287-212 B.C.E) (Burden and Faires, 2011).

Metode ekstrapolasi Richardson memiliki banyak aplikasi seperti dalam berbagai bidang: permasalahan analisis efek resolusi *mesh* dari metode numerik (Widiawaty *et al.*, 2024), akselerasi komputasi numerik pada masalah parabolik dengan perturbasi singular (Gelu and Duressa, 2024), penentuan harga opsi dengan pembatas ganda (Leduc, 2024), metode *finite difference* orde 6 untuk persamaan gelombang nonlinier (Wang and Ge, 2024). Dalam artikel ini akan dibahas tentang pengujian metode ekstrapolasi Richardson yang bertujuan untuk meningkatkan akurasi pendekatan secara numerik dari nilai turunan pertama suatu fungsi.

2. Kerangka Teori

Metode ekstrapolasi Richardson adalah metode yang digunakan untuk mendapatkan hasil berakurasi tinggi untuk formula dengan orde rendah. Formula maju/mundur untuk menghitung turunan memiliki orde yang lebih rendah dari formula tengah. Orde tinggi seperti pada formula tengah inilah yang diinginkan untuk diperoleh dengan menerapkan metode ekstrapolasi Richardson.

2.1. Galat Dengan Pangkat Lengkap

Ekstrapolasi dapat digunakan ketika metode pendekatan memiliki galat dengan bentuk yang dapat diprediksi, misalnya nilainya bergantung dari ukuran langkah h . Misalkan untuk $h > 0$ terdapat suatu formula $N_1(h)$ yang memberikan nilai pendekatan untuk nilai eksak konstan N_e , dan galat pemotongan (*truncation error*) yang terdapat pada formula pendekatan memiliki bentuk

$$N_e - N_1 = K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \dots \quad (1)$$

untuk konstanta-konstanta $K_1, K_2, K_3, \dots$ yang nilainya tidak diketahui (Burden and Faires, 2011).

Berdasarkan persamaan (1) di atas, galat pemotongan yang terbentuk adalah $O(h)$, sehingga kecuali terdapat salah satu dari $K_2, K_3, \dots$ yang relatif sangat besar terhadap K_1 maka untuk h yang cukup kecil berlaku pendekatan

$$N_e - N_1(h) \approx hK_1.$$

Tujuan dari proses ekstrapolasi adalah mencari cara yang mudah untuk mengkombinasikan pendekatan $O(h)$ ini secara tepat sehingga menghasilkan formula baru yang memiliki galat pemotongan berorde tinggi (Burden and Faires, 2011).

Misalkan formula $N_1(h)$ dapat dikombinasikan sehingga menghasilkan sebuah formula pendekatan baru $N_2(h)$ dengan galat pemotongan $O(h^2)$ untuk N_e dengan

$$N_e - N_2(h) = \hat{K}_2 h^2 + \hat{K}_3 h^3 + \hat{K}_4 h^4 + \dots$$

untuk konstanta-konstanta $\hat{K}_2, \hat{K}_3, \hat{K}_4, \dots$ yang tidak diketahui nilainya. Selanjutnya akan diperoleh pendekatan

$$\begin{aligned} N_e - N_2(0.1) &\approx 0.01\hat{K}_2 \\ N_e - N_2(0.01) &\approx 0.0001\hat{K}_2 \end{aligned}$$

dan seterusnya. Jika konstanta K_1 dan $\hat{K}_2$ memiliki *magnitude* yang kurang lebih sama maka pendekatan menggunakan $N_2(h)$ akan jauh lebih baik dari $N_1(h)$. Ekstrapolasi dapat dilanjutkan dengan mengkombinasikan formula $N_2(h)$ untuk menghasilkan formula baru $N_3(h)$ dengan galat pemotongan $O(h^3)$ dan seterusnya (Burden and Faires, 2011).

Untuk mendapatkan gambaran yang konkret, perhatikan formula pendekatan untuk nilai konstan N_e yang memiliki galat pemotongan $O(h)$ berikut (Burden and Faires, 2011):

$$N_e = N_1(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \dots \quad (2)$$

Formula (2) ini diasumsikan berlaku untuk semua h positif sehingga h dapat digantikan oleh setengah nilainya,

$$N_e = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h}{2} + K_2 \frac{h^2}{4} + K_3 \frac{h^3}{8} + \dots \quad (3)$$

Selanjutnya jika (2) dikurangkan dari 2 kali (3) dan dilakukan eliminasi terhadap bagian yang melibatkan K_1 akan diperoleh

$$N_e = N_2(h) - \frac{K_2}{2} h^2 - \frac{3K_3}{4} h^3 - \dots \quad (4)$$

dengan

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] \quad (5)$$

Dalam hal ini diperoleh formula $N_2(h)$, yang berdasarkan (4) memiliki galat pemotongan $O(h^2)$, yang disusun atas formula $N_1(h)$ dengan galat pemotongan $O(h)$ (Burden and Faires, 2011).

2.2. Galat Dengan Pangkat Genap

Metode ekstrapolasi Richardson dapat dilakukan ketika galat pemotongan untuk suatu formula mengikuti bentuk umum

$$\sum_{j=1}^{m-1} K_j h^{\alpha_j} + O(h^{\alpha_m})$$

untuk konstanta-konstanta K_j dan $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_m$. Terdapat kejadian khusus di mana formula yang digunakan untuk ekstrapolasi memiliki galat pemotongan yang memuat hanya pangkat genap dari h , yaitu

$$N_e = N_1(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \dots \quad (6)$$

Pada kasus ini proses ekstrapolasi akan menjadi lebih efektif dibandingkan dengan ketika ukuran langkah h yang memiliki pangkat ganjil juga muncul dalam formula (Burden and Faires, 2011).

Misalkan suatu proses pendekatan memiliki bentuk yang diberikan pada (6). Mengganti ukuran langkah h dengan nilai setengahnya, $h/2$, akan memberikan formula dengan galat pemotongan $O(h^2)$, berupa

$$N_e = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h^2}{4} + K_2 \frac{h^4}{16} + K_3 \frac{h^6}{64} + \dots \quad (7)$$

Dengan mengurangkan (6) dari 4 kali (7) diperoleh

$$3N_e = \left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - K_2 \frac{3h^4}{4} - K_3 \frac{15h^6}{16} - \dots \quad (8)$$

Membagi (8) dengan 3 akan menghasilkan formula dengan galat pemotongan $O(h^4)$ yang berbentuk

$$N_e = \frac{1}{3} \left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] - K_2 \frac{h^4}{4} - K_3 \frac{5h^6}{16} - \dots \quad (9)$$

Selanjutnya dengan mendefinisikan

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3} \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] \quad (10)$$

akan didapatkan formula pendekatan yang memiliki galat pemotongan $O(h^4)$,

$$N_e = N_2(h) - K_2 \frac{h^4}{4} - K_3 \frac{5h^6}{16} - \dots \quad (11)$$

Lebih lanjut, mengganti h pada (11) di atas dengan $h/2$ akan menghasilkan

$$N_e = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - K_2 \frac{h^4}{64} - K_3 \frac{5h^6}{1024} - \dots \quad (12)$$

Jika (11) dikurangkan dari 16 kali (12) maka akan diperoleh

$$15N_e = \left[16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] + K_3 \frac{15h^6}{64} + \dots$$

yang dapat ditulis kembali menjadi

$$N_e = \frac{1}{15} \left[16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] + K_3 \frac{15h^6}{64} + \dots$$

Apabila didefinisikan

$$N_3(h) = \frac{1}{15} \left[16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right] \quad (13)$$

maka akan dihasilkan suatu formula pendekatan dengan galat pemotongan $O(h^6)$,

$$N_e = N_3(h) + K_3 \frac{15h^6}{64} + \dots \quad (14)$$

Prosedur ini dapat dilanjutkan guna mendapatkan pendekatan dengan galat pemotongan yang lebih baik. Bentuk umum dari formula tersebut adalah (Burden and Faires, 2011):

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1} \quad (15)$$

untuk $j = 2, 3, 4, \dots$ dengan galat pemotongan $O(h^{2j})$. Tabel 1 memberikan orde formula pendekatan dengan menggunakan persamaan awal (6). Dalam hal ini dapat disimpulkan bahwa hasil yang sesungguhnya tidak menyimpang lebih dari nilai absolut $|N_3(h) - N_4(h)|$.

Tabel 1
Urutan dalam menentukan $N_j(h)$

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
1: $N_1(h)$			
2: $N_1(h/2)$	3: $N_2(h)$		
4: $N_1(h/4)$	5: $N_2(h/2)$	6: $N_3(h)$	
7: $N_1(h/8)$	8: $N_2(h/4)$	9: $N_3(h/2)$	10: $N_4(h)$

Dari (11) dan Tabel 1 dapat dilihat bahwa untuk menentukan $N_2(h)$ diperlukan $N_1(h)$ dan $N_1(h/2)$, untuk menghitung $N_3(h)$ dibutuhkan $N_2(h)$ dan $N_2(h/2)$ yang mana membutuhkan perhitungan $N_1(h/4)$. Penentuan $N_4(h)$ memerlukan semua nilai sebelumnya, dari 1 hingga 9.

Selain menggunakan ukuran langkah yang diperkecil menjadi setengah nilai sebelumnya, pembentukan formula pendekatan yang memiliki galat pemotongan lebih baik dapat dilakukan dengan mengambil sepertiga nilai ukuran langkah. Jika h pada (6) diganti dengan sepertiganya, maka diperoleh

$$N_e = N_1\left(\frac{h}{3}\right) + K_1 \frac{h^2}{9} + K_2 \frac{h^4}{81} + K_3 \frac{h^6}{729} + \dots \quad (16)$$

Mengurangkan (6) dari 9 kali (16) akan menghasilkan

$$8N_e = \left[9N_1\left(\frac{h}{3}\right) - N_1(h)\right] - K_2 \frac{8h^4}{9} - K_3 \frac{80h^6}{81} - \dots$$

yang dapat ditulis kembali menjadi

$$N_e = \frac{1}{8} \left[9N_1\left(\frac{h}{3}\right) - N_1(h)\right] - K_2 \frac{h^4}{9} - K_3 \frac{10h^6}{81} - \dots$$

Jika didefinisikan

$$N_2(h) = \frac{1}{8} \left[9N_1\left(\frac{h}{3}\right) - N_1(h)\right]$$

maka didapatkan formula dengan galat pemotongan $O(h^6)$,

$$N_e = N_2(h) - K_2 \frac{h^4}{9} - K_3 \frac{10h^6}{81} + \dots \quad (17)$$

Selanjutnya dengan melakukan substitusi $h/3$ ke h pada (17) akan didapatkan

$$N_e = N_2\left(\frac{h}{3}\right) + K_2 \frac{h^4}{729} + K_3 \frac{10h^6}{59049} + \dots \quad (18)$$

Mengurangkan (17) dari 81 kali (18) akan memberikan formula dengan galat pemotongan $O(h^6)$, yaitu

$$N_e = N_3(h) + K_3 \frac{h^6}{729} + \dots \quad (19)$$

dengan

$$N_3(h) = \frac{1}{80} \left[81N_2\left(\frac{h}{3}\right) - N_2(h)\right] \quad (20)$$

Diperhatikan bahwa meskipun sama-sama memiliki galat pemotongan $O(h^6)$, koefisien dari $K_3 h^6$ pada formula (14) memiliki orde 10^{-1} sedangkan koefisien dari $K_3 h^6$ pada formula (19) memiliki orde 10^{-3} .

2.3. Turunan Secara Numerik

Turunan dari fungsi $f(x)$ di titik x_0 , dinotasikan dengan $f'(x_0)$, didefinisikan sebagai (Sauer, 2019):

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

apabila limit tersebut ada (limit ini dapat saja bernilai tidak berhingga). Untuk fungsi $f(x) \in C^2[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, dan $x_0 \in [a, b]$, Teorema Taylor memberikan

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi(x))(x - x_0)^2}{2} \quad (21)$$

untuk suatu nilai $\xi(x)$ di antara x dan x_0 (Chapra, 2018). Dengan manipulasi aljabar, Persamaan (21) di atas dapat ditulis kembali

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f''(\xi(x))(x - x_0)}{2}. \quad (22)$$

Selanjutnya apabila diambil $h = x - x_0$ maka Persamaan (22) akan menjadi

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi(x)).$$

Untuk nilai h yang kecil (dekat dengan nol), maka pendekatan dari $f'(x_0)$ dapat dihitung menggunakan formula

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (23)$$

Formula (23) memiliki batas galat (*error bound*) sebesar $\frac{1}{2}M|h|$ di mana M merupakan nilai maksimum dari $|f''|$ pada interval $(x_0, x_0 + h)$ jika h positif dan $(x_0 + h, x_0)$ jika h negatif. Untuk kasus h positif, (23) disebut sebagai **formula maju** (*forward-difference*). Sebaliknya, untuk kasus h negatif, (23) disebut sebagai **formula mundur** (*backward-difference*) (Burden and Faires, 2011).

Diberikan $x_0, x_1, \dots, x_n$ merupakan titik-titik yang berada pada suatu interval I tertentu serta fungsi $f(x) \in C^{n+1}(I)$. Formula $(n + 1)$ -titik untuk mencari pendekatan dari $f'(x_j)$, untuk $j = 0, 1, \dots, n$ diberikan oleh persamaan (Burden and Faires, 2011)

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L'_k(x_j) + \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)$$

dengan L_k adalah polinomial Lagrange berderajat k . Dari persamaan ini dapat diturunkan **formula tengah** (*central-difference*) untuk menghitung $f'(x_0)$, yang diberikan oleh persamaan

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \quad (24)$$

dengan ξ berada di antara $x_0 - h$ dan $x_0 + h$ (Burden and Faires, 2011). Dapat dilihat bahwa galat pemotongan dari formula tengah adalah $O(h^2)$ yang lebih baik dari formula maju maupun formula mundur.

3. Metodologi

Langkah pertama dari pengujian adalah memilih lima buah fungsi uji yaitu: fungsi resiprok $1/x$, fungsi logaritma natural $\ln x$, penjumlahan fungsi polinomial dan eksponensial $x + e^x$, perkalian fungsi eksponensial dengan fungsi sinus $2^x \sin x$, serta perkalian fungsi polinomial dengan fungsi cosinus $x^3 \cos x$.

Fungsi-fungsi tersebut merupakan fungsi-fungsi elemen ter atau kombinasinya. Pemilihan ini didasari pertimbangan bahwa fungsi-fungsi elementer tersebut kerap muncul dalam berbagai persoalan. Sebagai contoh, persamaan diferensial bentuk khusus seperti persamaan diferensial linier koefisien konstan akan menghasilkan solusi homogen berupa fungsi eksponensial, fungsi sinus, fungsi cosinus, tau kombinasinya.

Formula turunan secara numerik yang diuji adalah perhitungan turunan pertama yang meliputi formula maju, formula mundur, dan formula tengah. Formula maju/mundur mewakili kasus di mana galat pemotongan memuat h dengan pangkat lengkap sedangkan formula tengah mewakili kasus hanya pangkat genap saja yang muncul. Ukuran langkah yang digunakan pada kasus pertama adalah $h = 0.1$ dan pada kasus kedua adalah $h = 0.2$.

Pada formula maju/mundur dihitung ekstrapolasi $N_2(h)$ yang memiliki galat pemotongan $O(h^2)$, dari formula $N_1(h)$ Persamaan (23) dengan galat pemotongan $O(h)$. Untuk formula tengah dihitung ekstrapolasi $N_2(h)$ dengan galat pemotongan $O(h^4)$ dan ekstrapolasi $N_3(h)$ yang memiliki galat pemotongan $O(h^6)$, mempergunakan formula dengan galat pemotongan $N_1(h)$ yaitu Persamaan (24). Untuk setiap fungsi pengujian dan setiap formula turunan numerik, hasil ekstrapolasi dibandingkan dengan nilai pendekatan asli dari sisi galat absolut terhadap nilai turunan eksak.

4. Hasil dan Pembahasan

Digunakan ukuran langkah sebesar $h = 0.1$ dan $h = 0.05$ guna mencari nilai pendekatan dari $f'(2.4)$ untuk fungsi $f(x) = 1/x$ menggunakan formula maju 2 titik. Diasumsikan bahwa formula ini memiliki galat pemotongan $O(h)$. Selanjutnya metode ekstrapolasi Richardson diaplikasikan untuk mendapatkan suatu hasil pendekatan yang lebih baik. Dengan mempergunakan ukuran langkah $h = 0.1$ formula maju (23) memberikan pendekatan $f'(2.4) \approx -0.166667$, sedang ukuran langkah $h = 0.05$ memberikan pendekatan $f'(2.4) \approx -0.170068$. Jadi diperoleh $N_1(h) = -0.166667$ dan $N_1(h/2) = -0.170068$. Menggunakan hasil ini, dari formula (5), metode ekstrapolasi Richardson memberikan pendekatan yang baru $N_2(h) = -0.173469$. Dari nilai eksak $f'(2.4) = -0.173611$ didapatkan galat absolut dari $N_1(h)$, $N_1(h/2)$, dan $N_2(h)$ secara berurutan sebesar 0.006944, 0.003543, dan 0.000142. Tabel 2 berikut memberikan hasil untuk fungsi-fungsi yang digunakan dalam pengujian dengan ukuran langkah $h = 0.1$ dan $h = 0.05$.

Tabel 2
Pendekatan dengan formula maju

$f(x)$	x_0	$ f'(x_0) - N_1(h) $	$ f'(x_0) - N_1(\frac{h}{2}) $	$ f'(x_0) - N_2(h) $
$1/x$	2.4	0.006944	0.003543	0.000142
$\ln x$	1.0	0.046898	0.024197	0.001495
$x + e^x$	0.0	0.051709	0.025422	0.000865
$2^x \sin x$	1.2	0.003740	0.000390	0.002959
$x^3 \cos x$	1.5	0.694324	0.336945	0.020434

Perhitungan di atas dikerjakan kembali dengan mengambil $h = -0.1$, yaitu digunakan formula mundur (23), untuk fungsi-fungsi pengujian yang sama. Hasil perhitungan ini diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3
Pendekatan dengan formula mundur

$f(x)$	x_0	$ f'(x_0) - N_1(h) $	$ f'(x_0) - N_1(\frac{h}{2}) $	$ f'(x_0) - N_2(h) $
$1/x$	2.4	0.007548	0.003694	0.000161
$\ln x$	1.0	0.053605	0.025865	0.001873
$x + e^x$	0.0	0.048374	0.024589	0.000803
$2^x \sin x$	1.2	0.007502	0.002420	0.002663
$x^3 \cos x$	1.5	0.612552	0.316475	0.020399

Nilai pendekatan yang memiliki galat pemotongan $O(h^2)$, $O(h^4)$, dan $O(h^6)$ untuk $f'(2.4)$ dari fungsi $f(x) = 1/x$ menggunakan ukuran langkah $h = 0.2$ dihitung menggunakan formula tengah (24),

$$N_1(h) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$$

yang memberikan pendekatan dengan galat pemotongan $O(h^2)$. Selanjutnya dihitung

$$N_1(0.2) = \frac{1}{0.4} [f(2.6) - f(2.2)] = -0.174825$$

$$N_1(0.1) = \frac{1}{0.2} [f(2.5) - f(2.3)] = -0.173913$$

Menggunakan dua nilai di atas dapat ditentukan pendekatan pertama dengan galat pemotongan $O(h^4)$, yaitu $N_2(h)$, berdasarkan (10):

$$N_2(0.2) = N_1(0.1) + \frac{1}{3} [N_1(0.1) - N_1(0.2)] = -0.173609$$

Untuk menentukan pendekatan dengan galat pemotongan $O(h^6)$ diperlukan nilai $N_2(h/2) = N_2(0.1)$ yang perhitungannya membutuhkan nilai $N_1(h/4) = N_1(0.05)$, yaitu

$$N_1(0.05) = \frac{1}{0.1} [f(2.45) - f(2.35)] = -0.173686$$

Sekarang dapat dihitung

$$\begin{aligned} N_2(0.1) &= N_1(0.05) + \frac{1}{3} [N_1(0.05) - N_1(0.1)] \\ &= -0.173611 \end{aligned}$$

Akhirnya nilai pendekatan dengan galat pemotongan $O(h^6)$, yaitu $N_3(h)$, dapat ditentukan berdasarkan (13):

$$\begin{aligned} N_3(0.1) &= N_2(0.1) + \frac{1}{15} [N_2(0.1) - N_1(0.2)] \\ &= -0.173611 \end{aligned}$$

Galat absolut dari pendekatan dengan galat pemotongan $O(h^2)$, $O(h^4)$, dan $O(h^6)$ diberikan pada Tabel 4, termasuk untuk fungsi-fungsi pengujian lainnya melalui perhitungan serupa. Ukuran langkah yang digunakan untuk semua fungsi tersebut adalah $h = 0.2$.

Tabel 4
Pendekatan dengan formula tengah

$f(x)$	x_0	$ f'(x_0) - N_1(h) $	$ f'(x_0) - N_2(h) $	$ f'(x_0) - N_3(h) $
$1/x$	2.4	0.001214	2.11×10^{-6}	9.17×10^{-10}
$\ln x$	1.0	0.013663	0.000083	1.49×10^{-7}
$x + e^x$	0.0	0.006680	3.34×10^{-6}	1.99×10^{-10}
$2^x \sin x$	1.2	0.022502	5.21×10^{-6}	1.79×10^{-9}
$x^3 \cos x$	1.5	0.162700	0.000281	3.44×10^{-8}

Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa lima fungsi pengujian yang digunakan untuk formula maju, metode ekstrapolasi Richardson menghasilkan peningkatan akurasi pendekatan nilai turunan secara numerik. Galat absolut pendekatan $N_2(h)$ terhadap nilai turunan eksak mengalami penurunan dari galat absolut pendekatan $N_1(h)$, secara berurutan dari fungsi uji pertama hingga kelima, sebesar 98.0%, 96.8%, 98.3%, 20.9%, dan 97.1%. Penurunan terkecil terjadi untuk fungsi $2^x \sin x$.

Hasil untuk formula mundur, yang ditampilkan pada Tabel 3, memberikan pola yang serupa dengan formula maju. Setiap fungsi mengalami peningkatan akurasi pendekatan dari $N_1(h)$ ke $N_2(h)$. Penurunan galat absolut terhadap nilai turunan eksak secara berurutan adalah sebesar 97.9%, 96.5%, 98.3%, 64.5%, dan 96.7%. Sama seperti pada kasus formula maju, di sini penurunan terkecil juga terjadi pada fungsi uji $2^x \sin x$.

Hasil yang sangat bagus diperoleh pada formula tengah seperti ditunjukkan pada Tabel 4. Meskipun ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0.2$ (dibandingkan dengan ukuran langkah $h = 0.1$ untuk formula maju/mundur), pendekatan $N_2(h)$ menghasilkan penurunan galat absolut yang sangat besar dibandingkan dengan pendekatan $N_2(h)$. Secara berurutan, dari fungsi uji pertama hingga kelima, galat $N_2(h)$ menjadi 0.0017, 0.0061, 0.0005, 0.00023, dan 0.0017 kali lebih kecil dari galat $N_1(h)$. Jika pada formula maju dan mundur fungsi uji $2^x \sin x$ mengalami penurunan galat paling kecil, dalam formula tengah fungsi ini justru mengalami penurunan terbesar. Galat $N_3(h)$ mengecil lebih lanjut dari galat $N_2(h)$ dengan orde kurang lebih 10^{-3} .

5. Simpulan

Metode ekstrapolasi Richardson telah mendemonstrasikan kemampuan dalam meningkatkan akurasi dari formula perhitungan turunan pertama secara numerik. Peningkatan akurasi bervariasi untuk tiap fungsi uji dan dipengaruhi oleh gradien fungsi-fungsi tersebut di titik yang digunakan dalam perhitungan. Secara umum ekstrapolasi untuk formula dengan galat pemotongan yang hanya memuat pangkat genap (formula tengah) memberikan akurasi yang lebih superior dibandingkan dengan formula dengan galat pemotongan pangkat lengkap (formula maju/mundur) meskipun ukuran langkah yang digunakan pada formula tengah dua kali lebih besar. Hasil ini disokong oleh akurasi dari pendekatan $N_1(h)$ yang asli memang lebih baik pada formula tengah.

Disarankan untuk melakukan pengujian lebih lanjut pada formula numerik turunan kedua untuk mendapatkan gambaran yang lebih luas dari kemampuan metode ekstrapolasi Richardson dalam peningkatan akurasi perhitungan turunan secara numerik. Fungsi-fungsi pengujian dapat diperbanyak dan disarankan pula untuk menggunakan ukuran langkah yang berbeda.

Daftar Pustaka

Burden, R. L. and Faires, J. D. (2011) *Numerical Analysis*. 9th edn. Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Chapra, S. C. (2018) *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. 4th edn. New York, NY: McGraw-Hill Education.

Gelu, F. W. and Duressa, G. F. (2024) 'An accelerated numerical computation for singularly perturbed Robin-type parabolic problems with small parameters', *Research in Mathematics*. Taylor & Francis, 11(1).

Leduc, G. (2024) 'The Boyle–Romberg Trinomial Tree, a Highly Efficient Method for Double Barrier Option Pricing', *Mathematics*, 12(7).

Sauer, T. (2019) *Numerical Analysis*. 3rd edn. Hoboken, NJ: Pearson.

Wang, S. and Ge, Y. (2024) 'Efficient sixth-order finite difference method for the two-dimensional nonlinear wave equation with variable coefficient', *Mathematical Sciences*. Springer Berlin Heidelberg, 18(2), pp. 257–273.

Widiawaty, C. D. *et al.* (2024) 'Analysis of Mesh Resolution Effect to Numerical Result of CFD-ROM: Turbulent Flow in Stationary Parallel Plate', *CFD Letters*, 16(8), pp. 1–17.